

La Fonction Exponentielle

Construction

On cherche à créer une fonction $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $x \mapsto e(x)$

Cette fonction doit vérifier la propriété suivante :

$$e(x + y) = e(x) \cdot e(y)$$

On a $e(x) = e(x - a + a) = e(x - a) \cdot e(a)$

De deux choses l'une

- Soit $\exists x e(x) = 0$
- Soit $\forall x e(x) \neq 0$

Cas $\exists x e(x) = 0$

Nommons cette valeur a .

$$e(x) = e(x - a) \cdot e(a) = e(x - a) \cdot 0 = 0$$

Par conséquent $\forall x e(x) = 0$

La fonction nulle est donc une solution possible pour définir la fonction exponentielle.

Cas $\forall x e(x) \neq 0$

$$e(x) = e\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = e\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e\left(\frac{x}{2}\right) = \left(e\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0, \text{ donc } e(x) \geq 0$$

Or, $e(x) \neq 0$

Par conséquent

$$\forall x e(x) > 0$$

Comme $e(x) = \left(e\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, on a $e(0) = (e(0))^2$

Ainsi, $(e(0))^2 - e(0) = 0$

$$e(0)(e(0) - 1) = 0$$

Comme $\forall x e(x) > 0$, le choix $e(0) = 0$ est exclu, on a donc

$$e(0) = 1$$

Faisons l'hypothèse que la fonction est dérivable, et intéressons-nous à son taux de variation.

$$\frac{e(x+h) - e(x)}{h} = \frac{e(x) \cdot e(h) - e(x)}{h} = e(x) \frac{e(h) - 1}{h} = e(x) \frac{e(0+h) - e(0)}{h}$$

Ainsi,

$$e'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(x+h) - e(x)}{h} = e(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(0+h) - e(0)}{h} = e(x) \cdot e'(0)$$
$$e'(x) = e'(0) \cdot e(x)$$

Nommons λ la valeur $e'(0)$

$$e'(x) = \lambda \cdot e(x)$$

Pour chaque λ choisi, la fonction $e(x)$ est-elle unique ?

Prenons f et g , deux fonctions qui ont le même λ .

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{\lambda fg - f\lambda g}{g^2}$$

Donc $\frac{f}{g}$ est une fonction constante.

$$\forall x \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \Rightarrow \frac{f(0)}{g(0)} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{1} = \alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

Par conséquent $f = g$

Pour λ choisi, il existe une unique fonction $e(x)$

Dans la suite, on choisit d'appeler Exponentielle la fonction correspondant au cas $\lambda = 1$, et de s'intéresser uniquement à celle-ci.

On a $e(n) = e(1 + 1 + \dots) = e(1) \cdot e(1) \cdot \dots = e(1)^n$.

Nommons $e = e(1)$

$$e(n) = e^n$$

Comme la fonction e vérifie les mêmes lois que la puissance, on note par extension pour toute valeur de \mathbb{R}

$$e(x) = e^x$$

Propriétés

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^x > 0$$

$$e^0 = 1$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Comme $(e^x)' = e^x$ et que $e^x > 0$, on a $(e^x)' > 0$, et donc

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R}

On a $e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x}$

Donc $e^x e^{-x} = 1$, et par conséquent

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Intéressons-nous à l'assertion $e^x > x$

On a $\forall x \ e^x > 0$, donc elle est vraie pour $x \leq 0$.

Pour $x > 0$, étudions $e^x - x$

On a $\frac{d}{dx}(e^x - x) = e^x - 1$. $e^0 = 1$, et est strictement croissante. Par conséquent, $e^x > 1$

Donc $e^x - 1 > 0$, donc $e^x - x$ strictement croissante, donc $e^x - x > e^0 - 0 > 0$

$$\forall x \ e^x > x$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, et $e^x > x$, par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{-x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$
